Sommes usuelles :

Dans tout ce qui suit, on considère $n \in \mathbb{N}$.

1. somme des premiers entiers naturels : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$

2. somme des premiers carrés d'entiers naturels : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

3. somme des premiers cubes d'entiers naturels : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$

$\Big($*On peut faire commencer chacune de ces sommes à l'indice* 1*, puisque le terme d'indice* 0 *vaut* 0,

par exemple : $\sum\limits_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + ... + n = 1 + ... + n = \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\Big)$

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On a :

a. $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}}$

b. Autrement dit, $somme\ de\ termes\ conscutifs = (nombre\ de\ termes) \times \frac{(premier\ terme) + (dernier\ terme)}{2}$

c. De manière générale, on a $\boxed{\sum_{k=m}^{n} u_k = (n-m+1) \times \frac{u_m + u_n}{2}}$

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. On a, notamment $u_n = u_0 \times q^n$, et :

a. $\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$, cas particulier : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

b. Autrement dit, $somme\ de\ termes\ conscutifs = (premier\ terme) \times \frac{1 - raison^{(nombre\ de\ termes)}}{1 - raison}$

c. De manière générale, on a $\boxed{\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \times \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}}$

6. téléscopage : $\boxed{\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}}$

7. linéarité : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, ainsi que $a \in \mathbb{R}$

a. $\boxed{\sum_{k=0}^{n} a u_k = a \sum_{k=0}^{n} u_k}$

b. $\boxed{\sum_{k=0}^{n}(u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k}$